



À propos du théorème de Lüroth sur les corps gauches

VOISIN VICTOR¹

Reçu : 24 septembre 2025/Accepté : 18 décembre 2025/En ligne : 2 février 2026

Résumé

L'objectif de cet article est de montrer que, si la généralisation du théorème de Lüroth est vraie pour le corps des fractions à indéterminée centrale $H(t)$, alors elle l'est pour le corps de fractions tordu $H(t, \sigma)$, quand H est superalgébrique sur son centre.

The main object of this article is to prove that, if the generalization of Lüroth's theorem is true for the skew fraction field $H(t)$ with central indeterminate, then it is true for the skew fraction field $H(t, \sigma)$, when H is superalgebraic over its center.

Mots-clés : Lüroth, théorie de Galois, corps gauches, inversibilité matricielle.

MSC : 12E15, 12E30, 13B05, 13F25, 15A09, 16U20.

1 Introduction

Le théorème de Lüroth donne une description des extensions intermédiaires de l'extension $k(t)/k$. Il énonce que

Théorème (de Lüroth) – *Si k est un corps commutatif, alors tout sous-corps L de $k(t)$ contenant k et différent de k est de la forme $k(f)$ (avec $f \in k(t)$) et l'extension $k(t)/L$ est finie.*

Bien que facile à démontrer, ce théorème est un outil particulièrement puissant, notamment en géométrie algébrique. Dans cet article, on s'intéresse à cette question dans le cas des corps non nécessairement commutatifs. Lorsque k n'est pas commutatif, la notion de corps de fractions n'a pas de sens de manière naturelle. Dans la première moitié du XX-ième siècle, Ore a proposé² une manière de généraliser cette notion : étant donnés un corps H , un endomorphisme de corps σ de

1. Université de Caen-Normandie

2. ORE, 1933, « Theory of Non-Commutative polynomials ».

H , et une σ -dérivation de H (une application δ de H dans H additive et vérifiant $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$ pour tous $a, b \in H$), l'anneau des polynômes tordu $H[t, \sigma, \delta]$, par σ et δ , est par définition le H -espace vectoriel à gauche $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Ht^n$ muni du produit

induit par les relations $ta = \sigma(a)t + \delta(a)$ pour tout $a \in H$. On montre que lorsque σ est un automorphisme de corps de H , cet anneau est de Ore, et qu'il possède donc un unique corps de fractions (voir COHN (1995, Chapters 1.3 and 2.1)), que l'on note $H(t, \sigma, \delta)$. C'est le corps des fractions à coefficients dans H tordu par σ et δ . On rappelle que les éléments de $H(t, \sigma, \delta)$ peuvent alors tous s'écrire de la forme $p(t)q(t)^{-1}$ (resp. $q(t)^{-1}p(t)$) avec $p(t), q(t) \in H[t, \sigma, \delta]$ et $q(t)$ non nul. Lorsque δ est nulle (ce qui sera le cas pour les résultats de cet article), on note plus simplement $H(t, \sigma)$, et lorsque, en plus, σ est l'identité sur H , on note $H(t)$, que l'on appelle corps des fractions à indéterminée centrale.

Dans le récent article LEGRAND et PARAN (2023), Legrand et Paran se sont intéressés à une généralisation du théorème de Lüroth dans le cas des corps de fractions à indéterminée centrale sur une algèbre à division (i.e. un corps de dimension finie sur son centre). De manière générale, comme introduit dans DESCHAMPS (2025), la généralisation du théorème de Lüroth s'énonce de la manière suivante : *étant donné un corps H (éventuellement gauche), un automorphisme σ de H et une σ -dérivation δ de H , on dit que $H(t, \sigma, \delta)$ vérifie la généralisation du théorème de Lüroth si, pour tout sous-corps Ω de $H(t, \sigma, \delta)$ contenant H et différent de H , Ω est de la forme $H(f)$ où $f \in H(t, \sigma, \delta)$ et, si $H(t, \sigma, \delta)/\Omega$ est finie à gauche et à droite et que les deux degrés sont égaux. Lorsque cette propriété est vérifiée, on écrira $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t, \sigma, \delta))$. Avec cette notation, le résultat de LEGRAND et PARAN (2023) s'énonce alors*

Théorème (Legrand - Paran) – *Pour toute algèbre à division H , on a $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t))$.*

La question de savoir si cette généralisation est vraie pour tous les corps de fractions tordus est encore largement ouverte. Dans son article DESCHAMPS (2025), Deschamps montre le résultat de réduction à l'indéterminée centrale suivant : *si H est un corps, σ un automorphisme de H d'ordre fini $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H/H^σ soit extérieure, $[H : H^\sigma] = [Z(H) : Z(H^\sigma)]$, la caractéristique de H est première à n et $\mu_n \subset Z(H^\sigma)$, alors si $H(t)$ vérifie la généralisation du Théorème de Lüroth, alors il en est de même pour $H(t, \sigma)$.*

L'objet de cet article est d'étendre ce résultat de réduction. En fait, comme on va le voir, dans le théorème de Deschamps, on peut facilement se passer de l'hypothèse que la caractéristique de H est première à n et $\mu_n \subset Z(H^\sigma)$. Pour généraliser son résultat, la vraie difficulté consiste à se passer de l'hypothèse $[H : H^\sigma] = [Z(H) : Z(H^\sigma)]$. C'est ce que l'on va faire dans le cas des corps *superalgébriques* sur leurs centres. On rappelle que, de manière générale, une extension L/K est dite *superalgébrique* (resp. *algébrique*) si, pour toute partie finie $A \subset L$ (resp. pour tout $a \in L$), l'extension $K(A)/K$ est finie à droite et à gauche (resp. l'extension $K(a)/K$ est finie à droite et

2. Terminologie, rappels et notations

à gauche). La théorie de Galois montre qu'une extension galoisienne, extérieure et algébrique est superalgébrique. On pourra retrouver cela chez JACOBSON (1956), hormis la définition d'extension superalgébrique, qui apparaît pour la première fois chez DESCHAMPS (2025). Ici, un corps superalgébrique sur son centre désigne un corps H tel que l'extension $H/Z(H)$ est superalgébrique. L'objet principal de cet article est de montrer le

Théorème (Principal) – *Soient H un corps et σ un automorphisme de H d'ordre fini tels que H/H^σ soit extérieure ; alors, si H est superalgébrique sur son centre, alors on a l'implication*

$$L\ddot{U}R(H(t)) \implies L\ddot{U}R(H(t, \sigma)).$$

Appliqué au théorème de Legrand et Paran, le Théorème Principal a alors pour conséquence le corollaire 2 de ce texte :

Corollaire 1 – *Si H est une algèbre à division, alors, on a $L\ddot{U}R(H(t, \sigma))$ pour tout automorphisme σ de H qui est d'ordre fini et tel que l'extension H/H^σ est extérieure.*

Nous illustrons ce dernier résultat en donnant des exemples d'applications non triviaux au §5.

Afin de démontrer le Théorème Principal, nous reprenons la stratégie utilisée dans DESCHAMPS (2025), et l'objet du §4 de ce texte est de présenter une synthèse de cette stratégie et de la formuler plus généralement pour pouvoir l'appliquer au cas $[H : H^\sigma] \neq [Z(H) : Z(H^\sigma)]$. Cette stratégie se ramène *in fine* à trouver une certaine matrice inversible à coefficients dans un corps (éventuellement gauche). Pour la bonne compréhension de cette technique, nous commençons le §3 par quelques rappels d'algèbre linéaire matricielle sur les corps gauches.

Dans le §5 est donnée la preuve du Théorème Principal, que nous présentons comme une conséquence d'une propriété, plus générale, qui assure l'implication $L\ddot{U}R(H(t)) \implies L\ddot{U}R(H(t, \sigma))$ (théorème 3). Les outils utilisent essentiellement de la théorie de Galois non commutative, dont nous rappelons les éléments essentiels dans le §2. Nous renvoyons le lecteur non familiarisé à cette théorie à COHN (1995) et JACOBSON (1956) pour un exposé complet de ses éléments.

Je remercie Alexandre Roy pour l'exemple 1 qu'il m'a communiqué.

2 Terminologie, rappels et notations

- ♦ Une extension H/K sera dite finie à gauche si H est de dimension finie en tant que K -espace vectoriel à gauche. On notera alors $[H : K]_g$ la dimension à gauche. La définition à droite est analogue et on notera $[H : K]_d$ la dimension

de H en tant que K -espace vectoriel à droite, qu'on appelle dimension à droite. On dira par ailleurs que H/K est finie si elle est finie à gauche et à droite et que les dimensions à gauche et à droite sont égales, et on notera alors $[H : K]$ le degré commun.

- ◆ Pour tout corps H , on note $Z(H)$ le centre de H .
- ◆ Pour tous corps H et $a \in H^*$, on notera

$$\begin{array}{ccc} I(a): & H & \longrightarrow H \\ & x & \longmapsto axa^{-1} \end{array}$$

l'automorphisme intérieur (de H) associé à l'élément a . Plus généralement, si A est une partie de H^* , on notera $I(A)$ l'ensemble $\{I(a)\}_{a \in A}$.

- ◆ Une extension H/K sera dite *extérieure* si l'identité sur H est le seul automorphisme intérieur de H fixant K . Elle sera dite *intérieure* si tout automorphisme de corps de H fixant K est intérieur.
- ◆ Si H est un corps et $\sigma \in \text{Aut}(H)$ (où $\text{Aut}(H)$ est le groupe des automorphismes de corps de H), on notera H^σ l'ensemble des invariants de H par rapport à σ , i.e. l'ensemble $\{x \in H \mid \sigma(x) = x\}$. Plus généralement, si $S \subset \text{Aut}(H)$, on notera H^S l'ensemble des invariants de H par rapport à S , i.e. l'ensemble $\{x \in H \mid \forall \sigma \in S, \sigma(x) = x\}$. Remarquons que pour tout $S \subset H$, H^S est un sous-corps de H .
- ◆ Pour tous corps H et $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{m,n}(H)$ désignera le H -anneau des matrices carrées à m lignes et n colonnes à coefficients dans H , et on notera $\mathcal{M}_n(H)$ pour désigner $\mathcal{M}_{n,n}(H)$.
- ◆ Pour tous corps commutatif k et $n \in \mathbb{N}^*$, on notera μ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité qui sont dans $\bar{k}$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k . On ne considérera μ_n que dans le cas d'un corps commutatif (quand k est gauche, l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité peut être infini et perdre sa structure de groupe).
- ◆ Rappels de théorie de Galois.
 - Une extension H/K sera dite *galoisienne* s'il existe un sous-groupe G de $\text{Aut}(H)$ tel que $K = H^G$. Dans cette situation, on notera $\text{Gal}(H/K)$ le groupe des K -automorphismes de H . On rappelle que, si une extension galoisienne est finie à gauche ou à droite, alors elle est finie (voir JACOBSON (1956, Chapter VII.5)).
 - Soit H un corps. On désignera par N -groupe de $\text{Aut}(H)$ tout sous-groupe G de $\text{Aut}(H)$ tel que $\mathcal{E}_G = \{a \in H^* \mid I(a) \in G\} \cup \{0_H\}$ est une $Z(H)$ -sous-algèbre de H . Pour un tel N -groupe G , l'ordre réduit, qu'on note $|G|_{\text{red}}$, correspond au produit de $[\mathcal{E}_G : Z(H)]$ par $|G/I(\mathcal{E}_G^*)|$ si ces deux quantités sont finies, sinon l'ordre réduit est égal à $+\infty$.
 - On rappelle le lemme d'Artin généralisé : si H est un corps et G est un N -groupe de $\text{Aut}(H)$, alors $|G|_{\text{red}} = [H : H^G]_g$. Si de plus H/H^G

3. Éléments de calcul matriciel

est finie à gauche, alors H/H^G est de groupe de Galois G (voir COHN (1995, Th.3.3.7)). Par exemple, si H/K est une extension finie galoisienne, comme $G = \text{Gal}(H/K)$ est un N -groupe de $\text{Aut}(H)$, $|G|_{\text{red}} = [H : H^G] = [H : K]$. On remarquera que si H/K est galoisienne extérieure de groupe fini G , alors $|G|_{\text{red}} = |G|$ et l'extension H/K est donc finie de degré $|G|$ (le lemme d'Artin généralisé pour les extensions extérieures est donc le même que dans le cas commutatif).

3 Éléments de calcul matriciel

Pour un corps gauche donné, on rappelle que la théorie de la dimension des espaces vectoriels (à droite ou à gauche) est la même que pour un corps commutatif (voir les références VAN DER WAERDEN (1950, Chapters 106-107) et GRIFONE (2011, Chapter 1.6), la seconde étant présente pour se convaincre que les preuves de certains résultats sont généralisables au cas non nécessairement commutatif). Pour l'écriture matricielle des applications linéaires, on reprend VAN DER WAERDEN (1950, Chapter 106) : étant donnés un corps K et E, F deux K -espaces vectoriels à droite, on note $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications K -linéaires à droite de E dans F (et plus généralement, on garde cette notation pour n'importe quels K -espaces vectoriels à droite) et $\mathcal{L}_K(E)$ l'ensemble des endomorphismes K -linéaires à droite de E . Ces deux ensembles sont des sous-groupes additifs de $\mathcal{F}(E, F)$ et $\mathcal{F}(E, E)$ respectivement (où pour tous ensembles A et B , $\mathcal{F}(A, B)$ est l'ensemble des applications de A dans B). Si l'on suppose que E et F sont de dimension finie à droite, disons m et n non nuls, et que l'on considère des K -bases à droite $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E et F respectivement, alors pour tout $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^n f_i \alpha_{i,j}$. L'évaluation de f en un vecteur de E corres-

pond matriciellement à la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ par un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(K)$ à droite, et on obtient alors une combinaison linéaire à droite des colonnes. Si E et F étaient des K -espaces vectoriels à gauche, alors la matrice de f serait une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ et l'évaluation de f en un vecteur de E correspondrait matriciellement à la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ par un élément de $\mathcal{M}_{1,m}(K)$ à gauche. L'écriture matricielle des applications K -linéaires à droite de E dans F se fait *via* cette construction qui établit une correspondance entre $\mathcal{L}_K(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,m}(K)$. Cette correspondance est un morphisme d'anneaux quand $E = F$ (plus

généralement, l'écriture matricielle des applications linéaires est compatible avec la composition et la multiplication matricielle). Dans le cas des endomorphismes d'un K -espace vectoriel à gauche, la correspondance établit un anti-morphisme d'anneaux.

Lorsque K est gauche, la caractérisation de l'inversibilité par indépendance linéaire des colonnes (ou des lignes) est plus délicate que dans le cas commutatif. On a la

Proposition 1 – Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_p(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est inversible dans $\mathcal{M}_p(K)$;
- (ii) M est inversible à gauche dans $\mathcal{M}_p(K)$;
- (iii) les colonnes de M sont linéairement indépendantes à droite par rapport à K ;
- (iv) M est inversible à droite dans $\mathcal{M}_p(K)$;
- (v) les lignes de M sont linéairement indépendantes à gauche par rapport à K .

Preuve. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de M .

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Supposons que les colonnes de M sont K -linéairement indépendantes à droite. Alors, $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_p)$ est une K -base à droite de $G = K^p$. on considère la K -base à droite canonique $(g_1, \dots, g_p)$ de G , qu'on note $\mathcal{B}_{can}$. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on écrit

alors $g_j = \sum_{i=1}^p C_i \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{p,j} \in K$. La matrice

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \dots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

vérifie ainsi $MN = I_n$: en effet, on a

$$MN = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}}(\text{Id}_G) \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}(\text{Id}_G) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\text{Id}_G) = I_n$$

et de la même manière, on a $NM = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}(\text{Id}_G) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}}(\text{Id}_G) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_G) = I_n$. Donc, M est inversible dans $\mathcal{M}_p(K)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

C'est la définition.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

4. Réduction au cas de l'indéterminée centrale

Supposons que M est inversible à gauche dans $\mathcal{M}_p(K)$. Soit $N \in \mathcal{M}_p(K)$ un inverse à gauche de M . Alors, $NM = I_n$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^p C_k \lambda_k = 0_{K^p}$$

où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de M . Alors,

$$M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0_{K^p}$$

et en multipliant par N à gauche, on obtient que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0_K$. Donc, les colonnes de M sont K -linéairement indépendantes à droite.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v)

On fait comme dans le cas de la K -indépendance linéaire à droite, sauf que l'on travaille ici avec la structure de K -espace vectoriel à gauche de G et les lignes de M . $\square$

Pour autant, il faut faire attention au fait qu'une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes à gauche n'est pas nécessairement inversible. Cela entraîne une énorme différence avec le résultat connu dans le cas commutatif :

Exemple 1 – On considère le corps $\mathbb{H}$ des quaternions d'Hamilton (il s'agit du groupe additif $\mathbb{R}^4$, dont on note $(1, i, j, k)$ la base canonique, et on définit par $\mathbb{R}$ -bilinearité une multiplication dans $\mathbb{R}^4$ où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $1^2 = 1$, $1 \cdot i = i \cdot 1 = i$, $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $1 \cdot k = k \cdot 1 = k$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ et $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$), ainsi que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & j \\ i & k \end{pmatrix}.$$

Les deux colonnes de M sont linéairement indépendantes à gauche. En revanche, M n'admet pas d'inverse. En effet, supposons qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{H})$ telle que $NM = MN = I_2$. En écrivant $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{H}$, alors le produit MN donne $\alpha + j\gamma = 1$ et $i\alpha + k\gamma = 0$, d'où $\gamma = j\alpha$ et alors $1 = \alpha + j^2\alpha = 0$: contradiction.

4 Réduction au cas de l'indéterminée centrale

Nous rappelons dans cette sous-section la stratégie développée dans DESCHAMPS (2025) pour la réduction au cas de l'indéterminée centrale $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t)) \implies \text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t, \sigma))$ que nous synthétisons en un énoncé plus global :

Théorème 1 – On se donne un corps H et un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(H)$ d'ordre fini n .

(i) En tant que $H(t^n)$ -espace vectoriel, à droite et à gauche, on a la décomposition

$$H(t, \sigma) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H(t^n) t^i$$

dont on notera $\pi_i : H(t, \sigma) \longrightarrow H(t^n) t^i$ les projecteurs associés, où $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

(ii) Si, pour tout sous-corps Ω de $H(t, \sigma)$ contenant H , les restrictions $\pi_{i|\Omega}$, où $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont des endomorphismes de l'espace Ω alors on a

$$L\ddot{U}R(H(t)) \implies L\ddot{U}R(H(t, \sigma)).$$

Cette propriété est, en particulier, vérifiée si, pour tout $f \in H(t, \sigma)$, il existe une matrice inversible $M_f \in \mathcal{M}_n(H(f))$ telle que $X_f M_f \in \mathcal{M}_{1,n}(H(f))$ où $X_f = (\pi_0(f) \ \pi_1(f) \ \dots \ \pi_{n-1}(f)) \in \mathcal{M}_{1,n}(H(t, \sigma))$.

Preuve. (i) La décomposition en tant que $H(t^n)$ -espace vectoriel à gauche découle de DESCHAMPS (2025, Prop.10.a)) (et on n'a pas besoin d'avoir σ complètement kummérien). La décomposition en tant que $H(t^n)$ -espace vectoriel à droite sera vérifiée dès qu'on aura montré que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $H(t^n) t^i$ est un sous- $H(t^n)$ -espace vectoriel à droite de $H(t, \sigma)$ (car entre les deux structures, la loi additive est la même), et cela découle du fait que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $H(t^n) t^i = t^i H(t^n)$: en effet, si $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $I(t^i)$ stabilise $H(t^n)$ et $I(t^{-i})$ stabilise $H(t^n)$ (et alors on a respectivement $t^i H(t^n) \subset H(t^n) t^i$ et $H(t^n) t^i \subset t^i H(t^n)$).

(ii) Supposons que pour tout sous-corps Ω de $H(t, \sigma)$ contenant H , les restrictions $\pi_{i|\Omega}$, où $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont des endomorphismes de l'espace Ω . Pour montrer l'implication, on va procéder en deux étapes :

1. montrer que pour tout sous-corps Ω de $H(t, \sigma)$ contenant H , $\Omega/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie et $\Omega \cap H(t^n)$ est un sous-corps de $H(t^n)$ contenant H et différent de H si $\Omega \neq H$;
2. conclure la preuve de l'implication.

1. Soit Ω un sous-corps de $H(t, \sigma)$ contenant H . On a

$$\Omega = \bigoplus_{i=0}^{n-1} ((H(t^n) t^i) \cap \Omega) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} ((t^i H(t^n)) \cap \Omega).$$

La première égalité découle de DESCHAMPS (2025, Prop.11.2.a)). La deuxième découle du fait que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $H(t^n) t^i = t^i H(t^n)$.

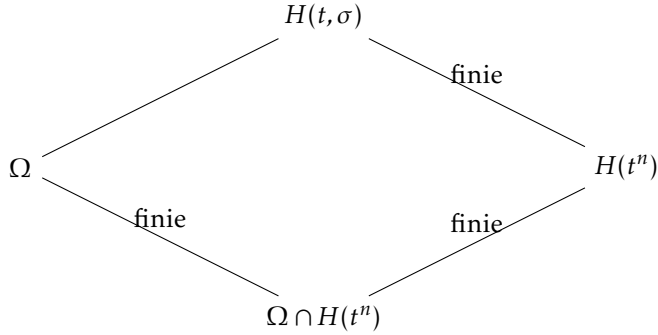
Montrons que $\Omega/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Si $\Omega \cap (H(t^n) t^i)$ est nul en tant que $\Omega \cap H(t^n)$ -espace vectoriel à gauche, alors ses dimensions

4. Réduction au cas de l'indéterminée centrale

à gauche et à droite par rapport à $\Omega \cap H(t^n)$ valent 0. Supposons alors que $\Omega \cap (H(t^n)t^i)$ est non nul. Alors, d'après la démonstration de DESCHAMPS (2025, Prop.11.2.b)), la dimension à gauche de $\Omega \cap (H(t^n)t^i)$ par rapport à $\Omega \cap H(t^n)$ vaut 1. De la même manière, comme $\Omega \cap (H(t^n)t^i) = \Omega \cap (t^i H(t^n))$, la dimension à droite de $\Omega \cap (H(t^n)t^i)$ par rapport à $\Omega \cap H(t^n)$ vaut 1. Dans tous les cas, la dimension à droite et la dimension à gauche de $\Omega \cap (H(t^n)t^i)$ par rapport à $\Omega \cap H(t^n)$ sont finies et égales. Donc, $\Omega/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie à gauche et à droite et le degré à gauche et le degré à droite sont égaux. Donc, $\Omega/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie.

De plus, le fait que $(\Omega \cap H(t^n))/H$ est non triviale si $\Omega \neq H$ découle de la démonstration de DESCHAMPS (2025, Prop.11.3)).

2. On peut à présent prouver l'implication. Supposons que l'on a $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t))$. Soit Ω un sous-corps de $H(t, \sigma)$ contenant H et différent de H . Le fait que $\Omega = H(f)$ pour un certain $f \in H(t, \sigma)$ découle de la preuve de DESCHAMPS (2025, Th.13). Il reste à montrer que $H(t, \sigma)/\Omega$ est finie. On considère le diagramme d'extensions suivant :



On sait par DESCHAMPS (2025, Lem.7.b)) que $H(t, \sigma)/H(t^n)$ est finie. Comme Ω/H est non triviale, par ce qu'on vient de faire, $(\Omega \cap H(t^n))/H$ est non triviale. Ainsi, comme on a $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t))$, l'extension $H(t^n)/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie. Par composition des extensions, on obtient alors que $H(t, \sigma)/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie. Comme $\Omega/(\Omega \cap H(t^n))$ est finie, on en déduit que $H(t, \sigma)/\Omega$ est finie.

Donc, on a bien $\text{L}\ddot{\text{U}}\text{R}(H(t, \sigma))$.

Supposons que pour tout $f \in H(t, \sigma)$, il existe une matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(H(f))$ inversible telle que

$$\begin{pmatrix} \pi_0(f) & \pi_1(f) & \dots & \pi_{n-1}(f) \end{pmatrix} M_f$$

est à coefficients dans $H(f)$. Cela signifie que $(\pi_0(f), \dots, \pi_{n-1}(f))$ est solution d'un système à n équations linéaires et linéairement indépendantes à droite, à coefficients dans $H(f)$.

Montrons que pour tout $f \in H(t, \sigma)$, $\pi_0(f), \pi_1(f), \dots, \pi_{n-1}(f) \in H(f)$ et alors cela implique directement que pour tout sous-corps Ω de $H(t, \sigma)$ contenant H et tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction $\pi_i|_{\Omega}$ de π_i à Ω est un endomorphisme.

Soit $f \in H(t, \sigma)$. La matrice M_f étant inversible dans $\mathcal{M}_n(H(f))$, il existe une matrice $N_f \in \mathcal{M}_n(H(f))$ telle que $M_f N_f = I_n$. Ainsi, comme N_f est à coefficients dans $H(f)$ et $(\pi_0(f) \ \pi_1(f) \ \dots \ \pi_{n-1}(f)) M_f$ est à coefficients dans $H(f)$,

$$(\pi_0(f) \ \pi_1(f) \ \dots \ \pi_{n-1}(f)) = (\pi_0(f) \ \pi_1(f) \ \dots \ \pi_{n-1}(f)) M_f N_f$$

est à coefficients dans $H(f)$. $\square$

Remarque 1 – C'est dans la preuve de (ii).2. (lors de l'utilisation de DESCHAMPS (2025, Th.13)) que l'on a besoin de l'hypothèse sur les restrictions $\pi_i|_{\Omega}$.

Pour construire une matrice M_f inversible, l'idée de Deschamps est de conjuguer l'égalité $f = \pi_0(f) + \dots + \pi_{n-1}(f)$ par des éléments $a \in H$ bien choisis afin d'obtenir un système linéaire adéquat. Pour ce faire, il fait une hypothèse sur l'existence de racines de l'unité dans le corps H pour, *in fine*, avoir pour matrice M_f , une matrice de Van der Monde inversible. Cette dernière hypothèse sur les racines de l'unité, est, en fait, superflue : on peut choisir de meilleurs candidats pour conjuguer l'égalité $f = \pi_0(f) + \dots + \pi_{n-1}(f)$ que ceux utilisés par Deschamps, comme nous allons l'expliquer maintenant.

La généralisation du lemme de Dedekind permet d'obtenir le résultat matriciel suivant :

Lemme 1 – Soit H/K une extension galoisienne, extérieure et finie de groupe de Galois $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute K -base à droite $(a_1, \dots, a_n)$ de H , la matrice $M = (g_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(H)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(H)$.

Preuve. Montrons que les lignes de M sont linéairement indépendantes à gauche dans H^n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in H$. On suppose que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (g_i(a_1) \ g_i(a_2) \ \dots \ g_i(a_n)) = 0_{H^n}.$$

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(a_j) = 0_H$. Par K -linéarité à droite de $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$, on

obtient que $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = 0_{\mathcal{F}(H, H)}$. Donc, par la généralisation du lemme de Dedekind

4. Réduction au cas de l'indéterminée centrale

(voir par exemple JACOBSON (1956, Chapter VII.6)), $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_H$. Ainsi, la matrice M est inversible dans $\mathcal{M}_n(H)$. $\square$

Ce lemme permet d'appliquer le théorème 1 pour obtenir la généralisation de DESCHAMPS (2025, Th13) sans aucune hypothèse sur la présence de racines de l'unité :

Théorème 2 – *Pour tout corps H et tout automorphisme de H d'ordre fini σ tels que H/K , où $K = H^\sigma$, soit extérieure et $[H : K] = [Z(H) : Z(K)]$, on a*

$$L\ddot{U}R(H(t)) \implies L\ddot{U}R(H(t, \sigma)).$$

Preuve. Soient H un corps et $\sigma \in \text{Aut}(H)$ d'ordre fini, dont on note $n \in \mathbb{N}^*$ l'ordre, tels que H/K , où $K = H^\sigma$, soit extérieure (voir le §2) et $[H : K] = [Z(H) : Z(K)]$.

La preuve du lemme 1 montre que toute $Z(K)$ -base $(a_0, \dots, a_{n-1})$ de $Z(H)$ induit une matrice $(\sigma^i(a_j))_{0 \leq i, j \leq n-1}$ inversible dans $\mathcal{M}_n(Z(H))$ (l'idée de choisir cette matrice est tirée de SAMUEL (2008, Chapter 2.7)). On fixe une $Z(K)$ -base de $Z(H)$ qu'on note $(a_0, \dots, a_{n-1})$ et on considère $M = N(\sigma^i(a_j))_{0 \leq i, j \leq n-1}$ où N est la matrice diagonale par blocs dont le premier est l'identité d'ordre 1 et le second la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ où pour tous $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_{i,j} = \delta_{i+j,n}$ (symbole de Kronecker en $i+j$ et n).

Soit $f \in H(t, \sigma)$. On écrit $f = \pi_0(f) + \dots + \pi_{n-1}(f)$. Montrons que

$$\begin{pmatrix} \pi_0(f) & \dots & \pi_{n-1}(f) \end{pmatrix} M$$

est à coefficients dans $H(f)$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le j -ième coefficient de

$$\begin{pmatrix} \pi_0(f) & \dots & \pi_{n-1}(f) \end{pmatrix} M$$

vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(f) \sigma^{-k}(a_j) = \sum_{k=0}^{n-1} (\pi_k(f) t^{-k}) t^k \sigma^{-k}(a_j) = \sum_{k=0}^{n-1} (\pi_k(f) t^{-k}) a_j t^k = a_j f$$

car pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\pi_k(f) t^{-k} \in H(t^n)$ et a_j commute avec tout élément de $H(t^n)$ (a_j commute avec tout élément de H par définition de $Z(H)$ et a_j commute avec t^n car $\sigma^n = \text{Id}_H$).

Ainsi, $\begin{pmatrix} \pi_0(f) & \dots & \pi_{n-1}(f) \end{pmatrix} M$ est à coefficients dans $H(f)$. De plus, M est inversible dans $\mathcal{M}_n(H(f))$ par produit et par le lemme 1. Donc, par le théorème 1, on a bien

$$L\ddot{U}R(H(t)) \implies L\ddot{U}R(H(t, \sigma)).$$

$\square$

5 Preuve du Théorème Principal

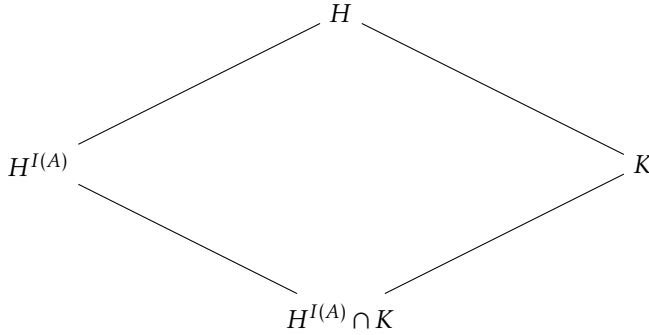
Dans ce § on se donne un corps H et un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(H)$ d'ordre fini n tel que H/K , où $K = H^\sigma$, soit extérieure. Comme on le voit, la preuve du théorème 2 utilise de manière rédhibitoire la condition $[Z(H) : Z(K)] = [H : K]^3$. Dans certains cas, on peut lever cette condition :

Théorème 3 – Si H et σ vérifient la propriété

(★) pour toute partie finie $A \subset H^*$ stable par σ , l'extension, $H/H^{I(A)}$ est intérieure alors, on a l'implication

$$\text{L\"ur}(H(t)) \implies \text{L\"ur}(H(t, \sigma)).$$

Preuve. Supposons que pour toute partie finie $A \subset H^*$ stable par σ , l'extension $H/H^{I(A)}$ est intérieure (voir le §2 pour la définition d'extension intérieure). On se donne une partie finie $A \subset H^*$ stable par σ et l'on considère la diagramme suivant :



Puisque A est stable par σ , on constate que la restriction de σ à $H^{I(A)}$ (pour la notation $H^{I(A)}$, voir le §2) est un automorphisme de $H^{I(A)}$. En effet, $\sigma^n = \text{Id}_H$ et si $x \in H^{I(A)}$, alors pour tout $a \in A$,

$$a\sigma(x)a^{-1} = \sigma(\sigma^{n-1}(a)x\sigma^{n-1}(a^{-1})) = \sigma(\sigma^{n-1}(a)x\sigma^{n-1}(a)^{-1}) = \sigma(x)$$

et alors, $\sigma(x) \in H^{I(A)}$. La propriété (★) assure alors que le morphisme de restriction

$$\begin{array}{ccc} \rho: \text{Gal}(H/K) & \longrightarrow & \text{Aut}(H^{I(A)}) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_{H^{I(A)}} \end{array}$$

est injectif. En effet, soit $\tau \in \text{Ker } \rho$. On a $\tau = \sigma^i$ avec $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et alors σ^i fixe $H^{I(A)}$, ce qui implique que σ^i est intérieur et que $i = 0$, i.e. $\sigma^i = \text{Id}_H$. Le même argument

3. De manière générale, pour une extension extérieure, galoisienne et finie H/K , on ne dispose que d'un épimorphisme $\text{Gal}(H/K) \longrightarrow \text{Gal}(Z(H)/Z(K))$ (voir DESCHAMPS 2023, Prop.6) et ce dernier n'a aucune raison d'être injectif (voir DESCHAMPS 2025).

5. Preuve du Théorème Principal

montre que $\rho(\sigma^i)$ ne peut être intérieur pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Ainsi, $\rho(\text{Gal}(H/K))$ est un N -groupe (voir le §2) fini d'ordre n . Le lemme d'Artin généralisé (voir le §2) prouve alors que l'extension $H^{I(A)}/(H^{I(A)})^{\rho(\text{Gal}(H/K))}$ est galoisienne finie, extérieure de groupe de Galois $\rho(\text{Gal}(H/K))$. Finalement, puisque $K = H^{\text{Gal}(H/K)}$, il est alors clair que $(H^{I(A)})^{\rho(\text{Gal}(H/K))} = H^{I(A)} \cap K$. En conclusion, l'extension $H^{I(A)}/(H^{I(A)} \cap K)$ est galoisienne extérieure cyclique de groupe de Galois engendré par la restriction de σ à $H^{I(A)}$.

Si l'on considère $(a_0, \dots, a_{n-1})$ une $(H^{I(A)} \cap K)$ -base à droite de $H^{I(A)}$, alors la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} \sigma^0(a_0) & \sigma^0(a_1) & \dots & \sigma^0(a_{n-1}) \\ \sigma^{-1}(a_0) & \sigma^{-1}(a_1) & \dots & \sigma^{-1}(a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{-(n-1)}(a_0) & \sigma^{-(n-1)}(a_1) & \dots & \sigma^{-(n-1)}(a_{n-1}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(H^{I(A)})$$

est inversible dans $\mathcal{M}_n(H^{I(A)})$ par le lemme 1.

Considérons $f \in H(t, \sigma)$ ainsi que

$$f_0 = \pi_0(f)t^{-0}, f_1 = \pi_1(f)t^{-1} \dots, f_{n-1} = \pi_{n-1}(f)t^{-(n-1)}.$$

Les coefficients des fractions f_i forment un ensemble fini et l'on peut considérer A l'ensemble formé de la réunion des orbites de ces éléments sous l'action de $\text{Gal}(H/K)$. L'ensemble A est alors fini, stable par σ et inclus dans H^* .

Par ce qu'on a fait, on dispose d'une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(H^{I(A)})$

$$M_f = \begin{pmatrix} \sigma^0(a_0) & \sigma^0(a_1) & \dots & \sigma^0(a_{n-1}) \\ \sigma^{-1}(a_0) & \sigma^{-1}(a_1) & \dots & \sigma^{-1}(a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{-(n-1)}(a_0) & \sigma^{-(n-1)}(a_1) & \dots & \sigma^{-(n-1)}(a_{n-1}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(H^{I(A)}) \subset \mathcal{M}_n(H(f))$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in H^{I(A)}$. Pour conclure, grâce au théorème 1, vérifions maintenant que $X_f M_f \in \mathcal{M}_{1,n}(H(f))$ où

$$X_f = (\pi_0(f) \ \pi_1(f) \ \dots \ \pi_{n-1}(f)).$$

On a construit A de sorte que les coefficients de M_f commutent avec $f_0, \dots, f_{n-1}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (\pi_0(f) \quad \dots \quad \pi_{n-1}(f))M_f &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(f)\sigma^{-k}(a_0) \quad \dots \quad \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(f)\sigma^{-k}(a_{n-1}) \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k t^k \sigma^{-k}(a_0) \quad \dots \quad \sum_{k=0}^{n-1} f_k t^k \sigma^{-k}(a_{n-1}) \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k a_0 t^k \quad \dots \quad \sum_{k=0}^{n-1} f_k a_{n-1} t^k \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a_0 f & \dots & a_{n-1} f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(H(f)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Un cas particulier pour la condition (★) est celui des corps supéralgébriques sur leurs centres. En effet, on a la

Proposition 2 – *Si H est supéralgébrique sur son centre, alors la condition (★) du théorème 3 est vérifiée.*

Preuve. On suppose que H est supéralgébrique sur son centre. Soit A une partie finie de H^* . On remarque que $I(Z(H)(A)^*)$ est un N -groupe de $\text{Aut}(H)$ et que $H^{I(Z(H)(A)^*)} = H^{I(A)}$. Donc, $H/H^{I(A)}$ est finie si et seulement si l'ordre réduit de $I(Z(H)(A)^*)$ est fini, ce qui correspond à $d = [Z(H)(A) : Z(H)]$ car on a affaire à un groupe d'automorphismes intérieurs. Comme H est supéralgébrique sur son centre, le lemme d'Artin généralisé (voir le §2) assure que $H/H^{I(A)}$ est bien finie et de groupe de Galois $I(Z(H)(A)^*)$. Donc, $H/H^{I(A)}$ est intérieure. Cela étant vrai pour toute partie finie de H^* , cela est vrai en particulier pour toute partie de H^* stable par σ . $\square$

Le Théorème Principal découle alors du théorème 3 et de la proposition 2.

La classe des corps supéralgébriques sur leurs centres contenant celle des algèbres à division, on en déduit, grâce au Théorème Principal, le corollaire suivant, qui étend le résultat de Legrand et Paran :

Corollaire 2 – *Si H est une algèbre à division, alors, on a $\text{Lür}(H(t, \sigma))$.*

Preuve. Supposons que H est une algèbre à division. Par le théorème de Legrand et Paran donné en introduction, on a $\text{Lür}(H(t))$. Par le Théorème principal, on en déduit directement $\text{Lür}(H(t, \sigma))$. $\square$

Ce corollaire étend significativement le théorème de Legrand et Paran :

Exemple 2 – a) Le cas le plus simple d'application est celui où H est commutatif : pour n'importe quel $\sigma \in \text{Aut}(H)$ d'ordre fini, on a $\text{Lür}(H(t, \sigma))$.

5. Preuve du Théorème Principal

- b) De manière générale, lorsque H est une algèbre à division, l'ensemble des $\sigma \in \text{Aut}(H)$ d'ordre fini tel que H/H^σ soit extérieure (galoisienne finie) est entièrement décrit grâce à DESCHAMPS et LEGRAND (2019) : une extension extérieure galoisienne finie H/K de groupe G est de la forme $H = K \otimes_{Z(K)} Z(H)$ avec $Z(H)/Z(K)$ galoisienne de groupe G et, réciproquement, si $L/Z(K)$ désigne une extension galoisienne finie de corps commutatifs telle que $H = K \otimes_{Z(K)} L$ soit un corps, alors l'extension H/K est galoisienne extérieure de groupe isomorphe à $\text{Gal}(L/Z(K))$. Dans notre situation, on commence par fixer K et on cherche une extension cyclique $L/Z(K)$ telle que $H = K \otimes_{Z(K)} L$ soit un corps. Par exemple, on considère $K = \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ (le corps des quaternions à coefficients dans $\mathbb{Q}$) et $L/\mathbb{Q}$ n'importe quelle extension cyclique telle que le niveau $v(L)$ du corps L soit supérieur ou égal à 4 (e.g. L ordonnable). On sait alors (voir DESCHAMPS et LEGRAND (2019)) que $H = \mathbb{H}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ est un corps. Tout générateur σ de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ se relève à H de sorte que H/H^σ est galoisienne extérieure finie, et l'on a donc $\text{LÜR}(H(t, \sigma))$.

Comme l'affirme le théorème 3, la condition la plus forte pour assurer la réduction au cas de l'indéterminée centrale du théorème de Lüroth est la condition $(\star)$. Nous finissons ce § en donnant l'exemple d'un corps H ne vérifiant pas la condition $(\star)$. Pour ce faire, on considère une extension L/K algébrique infinie galoisienne extérieure, dont le groupe de Galois G est abélien de rang topologique 1. et $H = L(t, \rho)$ où ρ est un générateur topologique de G . Comme G est infini, le morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & \rho^n \end{cases}$$

est injectif sur $\mathbb{Z}$. La théorie de Galois assure que L/K est superalgébrique et même superalgébrique relativement à ρ au sens de DESCHAMPS (2025).

Montrons, pour commencer, que $H^{I(t)} = K(t)$: comme ρ fixe K , on a déjà $K(t) \subset H^{I(t)}$. Pour l'inclusion réciproque, considérons un élément $f \in H^{I(t)}$. On a $ft = tf$ et si, une fois plongé $L(t, \rho)$ dans le corps des séries de Laurent $L((t, \rho))$, on écrit

$$f = \sum_{n \geq n_0} f_n t^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq n_0$, $f_n \in L$, l'égalité $tf = ft$ s'écrit alors

$$\sum_{n \geq n_0} \rho(f_n) t^{n+1} = \sum_{n \geq n_0} f_n t^{n+1},$$

et on en déduit que $f \in K((t))$: en effet, pour tout $n \geq n_0$, $f_n \in L^\rho = \overline{L^{\langle \rho \rangle}} = L^G = K$. Comme L/K est superalgébrique relativement à ρ , par DESCHAMPS (2025, Lem5.a)), on obtient finalement $f \in K(t)$. Donc, $H^{I(t)} = K(t)$.

Montrons que H ne vérifie pas $(\star)$ relativement à $\sigma = \text{Id}_H$. Considérons un élément $\tau \in G \setminus \langle \rho \rangle$ et le morphisme de K -espaces vectoriels à gauche

$$\psi : \begin{cases} L[t, \rho] & \longrightarrow & L[t, \rho] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \tau(f_n) t^n \end{cases}$$

qui est clairement bijectif de $L[t, \rho]$ sur $L[t, \rho]$ (car τ l'est de L sur L). Montrons que ψ est, en fait, un morphisme de K -anneaux. Soient $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n, g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n t^n \in L[t, \rho]$. On a

$$\begin{aligned} \psi(fg) &= \psi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k \rho^k(g_{n-k}) \right) t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \tau(f_k \rho^k(g_{n-k})) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \tau(f_k) \tau(\rho^k(g_{n-k})) \right) t^n \end{aligned}$$

et comme τ et ρ commutent dans G , on a

$$\psi(fg) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \tau(f_k) \rho^k(\tau(g_{n-k})) \right) t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tau(f_n) t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tau(g_n) t^n \right) = \psi(f)\psi(g).$$

Donc, ψ est un morphisme de K -anneaux. Comme il est bijectif de $L[t, \rho]$ sur $L[t, \rho]$, par propriété universelle du corps de fractions, il existe un unique morphisme de corps Ψ de $L(t, \rho)$ dans $L(t, \rho)$ qui prolonge ψ et qui, de plus, est bijectif de $L(t, \rho)$ sur $L(t, \rho)$. On remarque que, comme τ fixe K , ψ fixe $K[t]$, et alors Ψ fixe $K(t)$, d'où $\Psi \in \text{Gal}(H/H^{I(t)})$. Afin de montrer que $H/H^{I(t)}$ n'est pas intérieure, on va montrer que Ψ n'est pas intérieur.

Supposons que $\Psi = I(f)$ pour un certain $f \in H^*$. On considère $x \in L$, de sorte que $\Psi(x) = f x f^{-1} = \tau(x)$, i.e. $f x = \tau(x) f$. Ainsi, en plongeant dans $L((t, \rho))$, de sorte à pouvoir écrire

$$f = \sum_{n \geq n_0} f_n t^n$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq n_0, f_n \in L$, l'égalité $f x = \tau(x) f$ s'écrit

$$\sum_{n \geq n_0} f_n \rho^n(x) t^n = \sum_{n \geq n_0} \tau(x) f_n t^n.$$

Ainsi, s'il existe $n \geq n_0$ tel que $f_n \neq 0$, alors $I(f_n) \circ \rho^n = \tau$, ce qui est contradictoire : sinon, $\tau \circ \rho^{-n}$ est intérieur donc trivial car L/K est extérieure, et alors, $\rho^n = \tau$, pourtant $\tau \notin \langle \rho \rangle$. Donc, $f = 0_H$: contradiction car $f \in H^*$. Donc, Ψ n'est pas intérieur.

Donc, $H/H^{I(t)}$ n'est pas intérieure, ce qui permet d'affirmer que H et σ ne vérifient pas $(\star)$.

Références

- COHN, P. (1995). *Skew Fields : Theory of General Division Rings*. Cambridge University Press (cf. p. 2, 3, 5).
- DESCHAMPS, B. (2023). « Arithmétique des extensions intérieures ». *Journal of Algebra*. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.12.020>. URL : <https://perso.univ-lemans.fr/~bdesch/25.pdf> (cf. p. 12).
- DESCHAMPS, B. (2025). « Le théorème de Lüroth pour les corps de fractions tordus par un automorphisme fini ». *Journal of Pure and Applied Algebra Volume 229, Issue 6*. URL : <https://perso.univ-lemans.fr/~bdesch/29.pdf> (cf. p. 2, 3, 7-12, 15).
- DESCHAMPS, B. et F. LEGRAND (2019). « Le Problème Inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale ». *Journal of Pure and Applied Algebra* (cf. p. 15).
- GRIFONE, J. (2011). *Algèbre linéaire, 4^e édition*. Cépaduès (cf. p. 5).
- JACOBSON, N. (1956). *Structure of rings*. 37. American Mathematical Soc. (cf. p. 3, 4, 11).
- LEGRAND, F. et E. PARAN (2023). *Lüroth's and Igusa's theorems over Division Rings*. arXiv : 2304.10738 [math.NT]. URL : <https://arxiv.org/abs/2304.10738> (cf. p. 2).
- ORE, O. (1933). « Theory of Non-Commutative polynomials ». *Annals of Mathematics*, 34, 480-508 (cf. p. 1).
- SAMUEL, P. (2008). *Algebraic Theory of Numbers*. Hermann (cf. p. 11).
- VAN DER WAERDEN, B. (1950). *Modern Algebra II*. Frederick Ungar Publishing Company (cf. p. 5).

Table des matières

1	Introduction	1
2	Terminologie, rappels et notations	3
3	Éléments de calcul matriciel	5
4	Réduction au cas de l'indéterminée centrale	7
5	Preuve du Théorème Principal	12
	Références	17
	Table des matières	i